

## О ПОЛНЫХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТАХ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ ПРИ ОБРЫВАХ И/ИЛИ ЗАМЫКАНИЯХ КОНТАКТОВ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Изучаются возможности построения (двухполюсных) контактных схем, реализующих булевы функции от  $n$  переменных и допускающих короткие полные диагностические тесты относительно обрывов и/или замыканий контактов. Исследуемая тема относится к проблеме синтеза легкотестируемых схем, поставленной С. В. Яблонским и И. А. Чегис в 50-х годах прошлого века и к настоящему времени достаточно хорошо изученной.

*Материалы и методы.* Нижние оценки длин тестов доказываются путем подбора неисправностей контактов, при которых получающиеся функции неисправности произвольной контактной схемы, реализующей заданную булеву функцию, отличаются друг от друга не более чем на двух наборах. При этом некоторые классы «самых трудных» для тестирования булевых функций с точки зрения длин минимальных полных диагностических тестов хорошо описываются с помощью понятий максимального независимого множества в графе булева куба, а также двоичного блокового кода, исправляющего одну ошибку. Для доказательства верхних оценок длин тестов используются контактные схемы, моделирующие представления булевых функций дизъюнктивными либо конъюнктивными нормальными формами.

*Результаты.* Доказано, что любую булеву функцию от  $n$  переменных можно реализовать контактной схемой, допускающей полный диагностический тест длины не более  $2^{n-1}$  относительно обрывов контактов; верен также аналогичный факт относительно замыканий контактов. В трех случаях: при обрывах и замыканиях контактов, только при их обрывах или только при их замыканиях, найдены достаточно обширные классы булевых функций от  $n$  переменных, для каждой из которых длина минимального полного диагностического теста при реализации ее контактными схемами является максимально возможной среди всех булевых функций от  $n$  переменных и равна  $2^n$ ,  $2^{n-1}$ ,  $2^{n-1}$  соответственно. Получены сверхэкспоненциальные нижние оценки числа булевых функций в каждом из этих классов.

*Выводы.* Улучшены верхние оценки длин минимальных полных диагностических тестов размыкания и замыкания для произвольной булевой функции при реализации ее контактными схемами. Описаны некоторые классы «самых трудных» для тестирования функций.

**Ключевые слова:** контактная схема, обрыв контакта, замыкание контакта, полный диагностический тест, булева функция, максимальное независимое множество, двоичный блоковый код.

*K. A. Popkov*

## ON COMPLETE DIAGNOSTIC TESTS FOR CONTACT DIAGRAMS DURING OPENING AND/OR CLOSING OF CONTACTS

### **Abstract.**

*Background.* We study the possibility of constructing of (two-pole) contact circuits which implement Boolean functions on  $n$  variables and allow short complete diagnostic tests regarding contact breaks and/or closures. The topic under study relates to the problem of synthesis of easily testable circuits, set by S. V. Yablonskiy and I. A. Chegis in the 50s of the last century and well studied by now.

*Materials and methods.* We prove lower estimates of test lengths by selecting of contact faults, under which the resulting fault functions of an arbitrary contact circuit implementing a given Boolean function differ from each other on no more than two vectors. At that, some classes of "the most difficult" Boolean functions for testing in terms of the lengths of minimal complete diagnostic tests are well described using the concepts of maximal independent set in the Boolean cube graph, as well as binary block code correcting one error. We use contact circuits modeling representations of Boolean functions by disjunctive or conjunctive normal forms to prove the upper bounds of the test lengths.

*Results.* We prove that any Boolean function on  $n$  variables can be implemented by a contact circuit allowing a complete diagnostic test with length not more than  $2^{n-1}$  regarding contact breaks; the same fact is also true regarding contact closures. In three cases: under contact breaks and closures, only under their breaks or only under their closures, we find rather extensive classes of Boolean functions on  $n$  variables, for each of which the length of the minimal complete diagnostic test at its implementation by contact circuits is the maximal possible among all Boolean functions on  $n$  variables and equals  $2^n$ ,  $2^{n-1}$ ,  $2^{n-1}$ , respectively. We obtain overexponential lower bounds on the number of Boolean functions from each of these classes.

*Conclusions.* The upper bounds on the lengths of the minimal complete diagnostic tests of contact break and contact closure for an arbitrary Boolean function at its implementation by contact circuits are improved. Some classes of "the most difficult" functions for testing are described.

**Keywords:** contact circuit, contact break, contact closure, complete diagnostic test, Boolean function, maximal independent set, binary block code.

### **Введение**

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции (слово «двухполюсная» в дальнейшем будем опускать). Логический подход к тестированию контактных схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [2]. Представим, что имеется контактная схема  $S$ , реализующая булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , где  $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$ . Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы  $S$  могут перейти в неисправное состояние. В качестве неисправностей контактов обычно рассматри-

ваются их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании – тождественно единичной. Обрывы контактов также называются их размыканиями. В результате схема  $S$  вместо исходной функции  $f(\tilde{x}^n)$  будет реализовывать некоторую булеву функцию  $g(\tilde{x}^n)$ , вообще говоря, отличную от  $f$ . Все такие функции  $g(\tilde{x}^n)$ , получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы  $S$ , называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введем следующие определения [3–5]. *Проверяющим тестом* для схемы  $S$  называется такое множество  $T$  наборов значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ , что для любой отличной от  $f(\tilde{x}^n)$  функции неисправности  $g(\tilde{x}^n)$  схемы  $S$  в  $T$  найдется набор  $\tilde{\theta}$ , на котором  $f(\tilde{\theta}) \neq g(\tilde{\theta})$ . *Диагностическим тестом* для схемы  $S$  называется такое множество  $T$  наборов значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ , что  $T$  является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности  $g_1(\tilde{x}^n)$  и  $g_2(\tilde{x}^n)$  схемы  $S$  в  $T$  найдется набор  $\tilde{\theta}$ , на котором  $g_1(\tilde{\theta}) \neq g_2(\tilde{\theta})$ . Число наборов в  $T$  называется *длиной теста*. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины  $2^n$  для схемы  $S$  всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины  $n$ . Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [5, с. 110–111], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой. Если в схеме допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), то говорят о *тестах размыкания* (соответственно, о *тестах замыкания*).

Пусть зафиксирован вид неисправностей контактов и множество  $T$  является полным диагностическим тестом (ПДТ) для некоторой контактной схемы  $S$ . Введем следующие обозначения:  $D(T)$  – длина теста  $T$ ;  $D(S) = \min D(T)$ , где минимум берется по всем ПДТ  $T$  для контактной схемы  $S$ ;  $D(f) = \min D(S)$ , где минимум берется по всем контактным схемам  $S$ , реализующим функцию  $f$ ;  $D(n) = \max D(f)$ , где максимум берется по всем булевым функциям  $f$  от  $n$  переменных. Функция  $D(n)$  называется *функцией Шеннона* длины ПДТ.

Для удобства под буквой  $D$  будем ставить символы «0,1», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно обрывы и замыкания контактов, только их обрывы или только их замыкания. Х. А. Мадатян в [6] установил равенство  $D_{0,1}(n) = 2^n$  при  $n \geq 1$ ; Н. П. Редькин в [7] доказал соотношения  $D_0(n) \leq 2^n - 2$  и  $D_1(n) \leq 2^n - 2$  при  $n \geq 2$ . В работах [8–13] получены различные результаты, касающиеся длин минимальных проверяющих или диагностических тестов (но не ПДТ) для контактных схем при обрывах и/или замыканиях контактов.

В данной работе, в частности, будут доказаны равенства  $D_0(n) = 2^{n-1}$  и  $D_1(n) = 2^{n-1}$  при  $n \geq 1$  (следствия 2 и 4), улучшающие упомянутые оценки из [7], а также будет установлено, что число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D_{0,1}(f) = 2^n$  и  $D_a(f) = 2^{n-1}$ , соответственно не меньше  $4 \cdot 2^{2^{n-2}} - 6$  при  $n \geq 2$  (следствие 1) и асимптотически не меньше  $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log_2(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$  (следствия 3 и 5), где  $a$  – любое число из множества  $\{0,1\}$ .

### Полные диагностические тесты при обрывах и замыканиях контактов

Введем обозначение

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \beta = 1, \\ \bar{\alpha}, & \text{если } \beta = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha \in \{0,1\}$ .

Два двоичных набора одинаковой длины называются *соседними*, если они различаются ровно в одной компоненте.

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  (где  $n \geq 1$ ) – произвольная булева функция. Двоичный набор  $\tilde{\sigma}$  длины  $n$  назовем *обособленным набором* этой функции, если на любом наборе, соседнем с набором  $\tilde{\sigma}$ , она принимает значение  $\bar{f}(\tilde{\sigma})$ .

Обозначим через  $M(f)$  множество двоичных наборов длины  $n$ , каждый из которых является либо обособленным набором функции  $f(\tilde{x}^n)$ , либо соседним хотя бы с одним обособленным набором этой функции. Пусть  $s(f) = |M(f)|$ .

Далее для краткости всюду вместо «закрывающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ », будем говорить «контакт  $x_i$ » (соответственно «контакт  $\bar{x}_i$ »).

Пусть  $S$  – контактная схема. Множество (некоторых) ее контактов называется *сечением*, если оно имеет хотя бы один общий контакт с каждой несамопересекающейся цепью, соединяющей полюса схемы  $S$ . Сечение считается *тупиковым*, если после выбрасывания из него любого одного контакта оно перестает быть сечением.

Рассмотрим в качестве неисправностей контактов их обрывы и замыкания.

**Теорема 1.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ ,  $n \geq 1$ , справедливо неравенство  $D_{0,1}(f) \geq s(f)$ .

**Доказательство.** Пусть  $S$  – произвольная контактная схема, реализующая функцию  $f(\tilde{x}^n)$ . Достаточно доказать, что в любой ПДТ для схемы  $S$  входят все наборы из множества  $M(f)$ . Для этого используем идеи из дока-

зательства теоремы 16 работы [5, с. 132–134]. Пусть  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  – произвольный обособленный набор указанной функции. Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $f(\tilde{\sigma}) = 1$ . Рассуждая аналогично третьему-четвертому абзацам из доказательства теоремы 16 работы [5], получаем, что в схеме  $S$  есть несампересекающаяся цепь  $Z_{\tilde{\sigma}}$  между полюсами, содержащая контакты  $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$  и только их. В таком случае при обрыве всех контактов схемы  $S$ , не содержащихся в этой цепи, схема станет реализовывать функцию  $g(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$ ; при дополнительном замыкании всех контактов  $x_i^{\sigma_i}$  в цепи  $Z_{\tilde{\sigma}}$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, n\}$  – функцию  $g_i(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \& x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$ , а при обрыве всех контактов схемы  $S$  – функцию  $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 0$ . Функцию  $g(\tilde{x}^n)$  можно отличить от функции  $g_i(\tilde{x}^n)$  только на наборе  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \bar{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ , а от функции  $g_0(\tilde{x}^n)$  – только на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому в любой ПДТ для схемы  $S$  должны входить набор  $\tilde{\sigma}$  и  $n$  соседних с ним наборов.

2. Пусть  $f(\tilde{\sigma}) = 0$ . Рассуждая аналогично шестому-девятому абзацам из доказательства теоремы 16 работы [5], получаем, что в схеме  $S$  есть тупиковое сечение  $A^*$ , содержащее контакты  $x_1^{\bar{\sigma}_1}, \dots, x_n^{\bar{\sigma}_n}$  и только их, а при замыкании всех контактов схемы  $S$ , не входящих в это сечение, схема станет реализовывать функцию  $g'(\tilde{x}^n) = x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$ . Тогда дополнительный обрыв всех контактов  $x_i^{\bar{\sigma}_i}$  в сечении  $A^*$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, n\}$  равносильно подаче на вход схемы  $S$  (в которой уже все контакты не из  $A^*$  замкнуты) вместо переменной  $x_i$  значения  $\sigma_i$ , и схема при такой неисправности станет реализовывать функцию

$$\begin{aligned} g'_i(\tilde{x}^n) &= g'(x_1, \dots, x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_{i-1}^{\bar{\sigma}_{i-1}} \vee \sigma_i^{\bar{\sigma}_i} \vee x_{i+1}^{\bar{\sigma}_{i+1}} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} = \\ &= x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_{i-1}^{\bar{\sigma}_{i-1}} \vee x_{i+1}^{\bar{\sigma}_{i+1}} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}; \end{aligned}$$

при замыкании всех контактов схемы  $S$  она станет реализовывать функцию  $g'_0(\tilde{x}^n) \equiv 1$ . Функцию  $g'(\tilde{x}^n)$  можно отличить от функции  $g'_i(\tilde{x}^n)$  только на наборе  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \bar{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ , а от функции  $g'_0(\tilde{x}^n)$  – только на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому в любой ПДТ для схемы  $S$  должен входить набор  $\tilde{\sigma}$  и  $n$  соседних с ним наборов.

В итоге получаем, что в любой ПДТ для схемы  $S$  должны входить все обособленные наборы функции  $f(\tilde{x}^n)$ , а также все наборы, соседние хотя бы с одним обособленным набором этой функции, т.е. все наборы из множества  $M(f)$ . Теорема 1 доказана.

Множество  $A$  вершин графа  $G$  называется *независимым*, если никакие две вершины из  $A$  не соединены ребром в  $G$ .

Множество вершин графа  $G$  называется *максимальным независимым* (МНМ), если оно является независимым, но перестает быть таковым при добавлении к нему любой другой вершины из этого графа.

По аналогии с [14] через  $\text{mis}(G)$  будем обозначать общее число МНМ в графе  $G$ , а через  $C_n$  – граф булева куба размерности  $n$  (его вершинами являются всевозможные двоичные наборы длины  $n$ , а ребрами соединены только соседние наборы).

Введем обозначения:  $\tilde{0}^d = \underbrace{0, \dots, 0}_d$ ,  $\tilde{1}^d = \underbrace{1, \dots, 1}_d$ , где  $d \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 2.** Число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных,  $n \geq 1$ , для которых  $D_{0,1}(f) = 2^n$ , не меньше  $2 \cdot \text{mis}(C_n) - 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $A$  – произвольное МНМ в графе  $C_n$ . Через  $f_{A,\alpha}(\tilde{x}^n)$  обозначим булеву функцию, принимающую значение  $\alpha$  на всех наборах из множества  $A$  и значение  $\bar{\alpha}$  на всех остальных наборах ( $\alpha \in \{0,1\}$ ). Заметим, что любой набор из  $A$  является обособленным набором функции  $f_{A,\alpha}$  в силу независимости этого множества, а любой другой двоичный набор длины  $n$  – соседним хотя бы с одним обособленным набором данной функции в силу максимальной множества  $A$ . Поэтому по теореме 1  $s(f_{A,\alpha}) = 2^n$  и  $D_{0,1}(f_{A,\alpha}) \geq 2^n$ . С другой стороны,  $D_{0,1}(f_{A,\alpha}) \leq 2^n$ , поскольку для произвольной контактной схемы, реализующей функцию  $f_{A,\alpha}(\tilde{x}^n)$ , существует тривиальный ПДТ длины  $2^n$ . Следовательно,  $D_{0,1}(f_{A,\alpha}) = 2^n$ .

Очевидно, что все функции  $f_{A,\alpha}$  при фиксированном  $\alpha \in \{0,1\}$  попарно различны. Предположим, что  $f_{A_0,0}(\tilde{x}^n) \equiv f_{A_1,1}(\tilde{x}^n)$  для некоторых МНМ  $A_0$  и  $A_1$  в графе  $C_n$ . Пусть  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\sigma}'$  – два произвольных соседних набора длины  $n$ . Если

$$f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}) = f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}') = 0,$$

то  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in A_0$ , что противоречит независимости множества  $A_0$ . Если

$$f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}) = f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}') = 1,$$

то

$$f_{A_1,1}(\tilde{\sigma}) = f_{A_1,1}(\tilde{\sigma}') = 1$$

и  $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in A_1$ , что противоречит независимости множества  $A_1$ . Поэтому на любых двух соседних наборах функция  $f_{A_0,0}(\tilde{x}^n)$  принимает различные значения. В таком случае данная функция однозначно задается, например, значением  $f_{A_0,0}(\tilde{0}^n)$ ; несложно показать, что она совпадает с одной из функций  $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ ,  $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$ .

В итоге получаем, что среди всех функций  $f_{A,\alpha}(\tilde{x}^n)$  для произвольных МНМ  $A$  и  $\alpha \in \{0,1\}$  совпадать могут не более двух пар функций. Поэтому общее число различных таких функций не меньше  $2 \cdot \text{mis}(C_n) - 2$ . Теорема 2 доказана.

В работе [14, теорема 1] при  $n \geq 2$  установлено соотношение

$$2^{n-2} \leq \log_2 \text{mis}(C_n) \leq 0,78(1 + o(1))2^{n-1};$$

в частности,  $\text{mis}(C_n) \geq 2^{2^{n-2}}$ . Следующая теорема улучшает это неравенство.

**Теорема 3.** Для любого  $n \geq 2$  справедливо неравенство  $\text{mis}(C_n) \geq 2 \cdot 2^{2^{n-2}} - 2$ .

Из теорем 2 и 3 вытекает

**Следствие 1.** Число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных,  $n \geq 2$ , для которых  $D_{0,1}(f) = 2^n$ , не меньше  $4 \cdot 2^{2^{n-2}} - 6$ .

**Доказательство теоремы 3.** Пусть  $m = 2^{n-2}$ . Обозначим всевозможные двоичные наборы длины  $n-1$ , содержащие четное (нечетное) число единичных компонент, через  $\tilde{\tau}_1^0, \dots, \tilde{\tau}_m^0$  (соответственно, через  $\tilde{\tau}_1^1, \dots, \tilde{\tau}_m^1$ ) в произвольном порядке (как известно, количества таких наборов совпадают и равны половине числа всех двоичных наборов длины  $n-1$ , т.е. равны  $\frac{2^{n-1}}{2} = m$ ).

Пусть  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  – произвольные булевы константы. Для каждого набора  $\tilde{\tau}_i^\beta = (\tau_{i,1}^\beta, \dots, \tau_{i,n-1}^\beta)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , положим  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta = (\gamma_i, \tau_{i,1}^\beta, \dots, \tau_{i,n-1}^\beta)$  (набор, получающийся из набора  $\tilde{\tau}_i^\beta$  приписыванием на первое место значения  $\gamma_i$ ). Никакие два набора  $\tilde{\tau}_i^\beta$  и  $\tilde{\tau}_j^\beta$ , а значит, и никакие два набора  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta$  и  $\tilde{\sigma}_{j,\gamma_j}^\beta$ , при  $i \neq j$  и одном и том же  $\beta$ , очевидно, не являются соседними, поэтому множество  $\{\tilde{\sigma}_{1,\gamma_1}^\beta, \dots, \tilde{\sigma}_{m,\gamma_m}^\beta\}$  является независимым в графе  $C_n$ . Дополним его произвольным образом до МНМ в этом графе и обозначим полученное множество через  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$ .

Достаточно доказать, что среди построенных МНМ  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$  не менее  $2 \cdot 2^m - 2 = 2^{m+1} - 2$  различных. Пусть  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \beta', \gamma'_1, \dots, \gamma'_m$  – такие булевы константы, что  $(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq (\beta', \gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ . Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $\beta = \beta'$ . Тогда существует такое  $i \in \{1, \dots, m\}$ , что  $\gamma_i \neq \gamma'_i$ . Наборы  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta$  и  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma'_i}^\beta$  являются соседними, поскольку  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta = (\gamma_i, \tau_{i,1}^\beta, \dots, \tau_{i,n-1}^\beta)$ ,  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma'_i}^\beta = (\gamma'_i, \tau_{i,1}^\beta, \dots, \tau_{i,n-1}^\beta)$ . При этом по построению

$$\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta \in A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta \quad (1)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta \in A_{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m}^\beta. \quad (2)$$

Из (1) с учетом независимости множества  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$  следует, что  $\tilde{\sigma}_{i,\gamma_i}^\beta \notin A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$ . Отсюда и из (2) вытекает, что множества  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$  и  $A_{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m}^\beta$  различны.

2. Пусть  $\beta \neq \beta'$ . Предположим, что  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta = A_{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m}^{\beta'}$ . Тогда по построению

$$A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta \supseteq \left\{ \tilde{\sigma}_{1,\gamma_1}^\beta, \dots, \tilde{\sigma}_{m,\gamma_m}^\beta, \tilde{\sigma}_{1,\gamma'_1}^{\beta'}, \dots, \tilde{\sigma}_{m,\gamma'_m}^{\beta'} \right\}. \quad (3)$$

Допустим также, что не выполнено соотношение  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$ . Тогда существуют такие  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , что  $\gamma_i = 0$ ,  $\gamma_j = 1$ . Четность числа единичных компонент наборов  $\tilde{\tau}_i^\beta = (\tau_{i,1}^\beta, \dots, \tau_{i,n-1}^\beta)$  и  $\tilde{\tau}_j^\beta = (\tau_{j,1}^\beta, \dots, \tau_{j,n-1}^\beta)$  одинакова (см. определения этих наборов), поэтому

$$(\tau_{i,1}^\beta \oplus \tau_{j,1}^\beta) \oplus \dots \oplus (\tau_{i,n-1}^\beta \oplus \tau_{j,n-1}^\beta) = (\tau_{i,1}^\beta \oplus \dots \oplus \tau_{i,n-1}^\beta) \oplus (\tau_{j,1}^\beta \oplus \dots \oplus \tau_{j,n-1}^\beta) = 0.$$

Отсюда следует, что число компонент, в которых наборы  $\tilde{\tau}_i^\beta$  и  $\tilde{\tau}_j^\beta$  различаются, четно. Последовательно заменяя произвольные пары таких компонент набора  $\tilde{\tau}_i^\beta$  на пары соответствующих компонент набора  $\tilde{\tau}_j^\beta$ , получим последовательность наборов  $\tilde{\tau}_{i_1}^\beta, \tilde{\tau}_{i_2}^\beta, \dots, \tilde{\tau}_{i_t}^\beta$ , где  $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i_1 = i$  и  $i_t = j$ , в которой любые два расположенные рядом набора различаются ровно в двух компонентах. Из равенств  $\gamma_{i_1} = 0$ ,  $\gamma_{i_t} = 1$  следует существование такого  $r \in \{1, \dots, t-1\}$ , что  $\gamma_{i_r} = 0$ ,  $\gamma_{i_{r+1}} = 1$ . Тогда наборы

$$\tilde{\sigma}_{i_r, \gamma_{i_r}}^\beta = (0, \tau_{i_r,1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,n-1}^\beta) \quad (4)$$

и  $\tilde{\sigma}_{i_{r+1}, \gamma_{i_{r+1}}}^\beta = (1, \tau_{i_{r+1},1}^\beta, \dots, \tau_{i_{r+1},n-1}^\beta)$  различаются ровно в трех компонентах; пусть это первая,  $u$ -я и  $v$ -я компоненты, где  $u < v$ , т.е.

$$\tilde{\sigma}_{i_{r+1}, \gamma_{i_{r+1}}}^\beta = (1, \tau_{i_r,1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,u-1}^\beta, \bar{\tau}_{i_r,u}^\beta, \tau_{i_r,u+1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,v-1}^\beta, \bar{\tau}_{i_r,v}^\beta, \tau_{i_r,v+1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,n-1}^\beta). \quad (5)$$

Оба указанных набора принадлежат множеству  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$  в силу (3).

Заметим, что четность числа единичных компонент наборов  $\tilde{\tau}_{i_r}^\beta = (\tau_{i_r,1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,n-1}^\beta)$  и  $(\tau_{i_r,1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,u-1}^\beta, \bar{\tau}_{i_r,u}^\beta, \tau_{i_r,u+1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,n-1}^\beta)$  различна,

поэтому  $(\tau_{i_r,1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,u-1}^\beta, \bar{\tau}_{i_r,u}^\beta, \tau_{i_r,u+1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,n-1}^\beta) = \bar{\tau}_{i'}^{\beta'}$  для некоторого  $i' \in \{1, \dots, m\}$ . Набор  $\bar{\sigma}_{i',\gamma_{i'}}^{\beta'} = (\gamma_{i'}, \tau_{i_r,1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,u-1}^\beta, \bar{\tau}_{i_r,u}^\beta, \tau_{i_r,u+1}^\beta, \dots, \tau_{i_r,n-1}^\beta)$  является соседним с набором  $\bar{\sigma}_{i_r,\gamma_{i_r}}^\beta$  при  $\gamma_{i'} = 0$  и соседним с набором  $\bar{\sigma}_{i_{r+1},\gamma_{i_{r+1}}}^\beta$  при  $\gamma_{i'} = 1$ , см. (4), (5). Тогда  $\bar{\sigma}_{i',\gamma_{i'}}^{\beta'} \notin A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$ , однако это противоречит соотношению (3). Полученное противоречие означает, что  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$ . Аналогично доказывается соотношение  $\gamma'_1 = \dots = \gamma'_m$ .

Далее, набор  $\bar{\tau}_1^0 = (\tau_{1,1}^0, \dots, \tau_{1,n-1}^0)$  содержит четное число единичных компонент, а набор  $(\bar{\tau}_{1,1}^0, \tau_{1,2}^0, \dots, \tau_{1,n-1}^0)$  – нечетное, поэтому совпадает с набором  $\bar{\tau}_{i''}^1$  для некоторого  $i'' \in \{1, \dots, m\}$ . Наборы  $\bar{\sigma}_{1,\gamma_1}^0 = (\gamma_1, \tau_{1,1}^0, \dots, \tau_{1,n-1}^0)$  и  $\bar{\sigma}_{i'',\gamma_{i''}}^1 = (\gamma_{i''}, \bar{\tau}_{1,1}^0, \tau_{1,2}^0, \dots, \tau_{1,n-1}^0)$  принадлежат независимому множеству  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$  в силу (3), т.е. не могут быть соседними. Отсюда заключаем, что  $\gamma_1 \neq \gamma_{i''}$ . Значит, либо одновременно  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$  и  $\gamma'_1 = \dots = \gamma'_m = 1$ , либо одновременно  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 1$  и  $\gamma'_1 = \dots = \gamma'_m = 0$ .

Из приведенных рассуждений в случаях 1 и 2 следует, что из всех множеств  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$ , где  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m$  – произвольные булевы константы, совпадать могут только множества  $A_{0^{n-1}}^0$  и  $A_{1^{n-1}}^1$ , а также множества  $A_{1^{n-1}}^0$  и  $A_{0^{n-1}}^1$ . Таким образом, общее число различных множеств  $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^\beta$  не меньше  $2^{m+1} - 2$ . Теорема 3 доказана.

### Полные диагностические тесты размыкания

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  (где  $n \geq 1$ ) – произвольная булева функция. Двоичный набор  $\tilde{\sigma}$  длины  $n$  назовем *квазиобособленным набором* этой функции, если на любом наборе, соседнем с набором  $\tilde{\sigma}$ , кроме, быть может, одного набора  $\tilde{\pi}$ , она принимает значение  $\bar{f}(\tilde{\sigma})$ . Набор  $\tilde{\pi}$  при этом назовем *парным* набору  $\tilde{\sigma}$ .

Пару  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\pi})$  квазиобособленных наборов функции  $f(\tilde{x}^n)$  назовем ее *особой парой наборов*, если они являются парными друг другу.

Заметим, что ни один набор из особой пары функции  $f(\tilde{x}^n)$  не может быть парным никакому квазиобособленному набору этой функции, кроме другого набора из той же пары; в противном случае первый набор сам не был бы квазиобособленным.

Двоичный набор  $\tilde{\sigma}$  длины  $n$  будем называть *нулевым (единичным) набором* функции  $f(\tilde{x}^n)$ , если  $f(\tilde{\sigma}) = 0$  (соответственно  $f(\tilde{\sigma}) = 1$ ).

В дальнейшем нам понадобятся понятия элементарной конъюнкции (ЭК), элементарной дизъюнкции (ЭД), их рангов, дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), конъюнктивной нормальной формы (КНФ), а также длин ДНФ и КНФ. Все эти понятия можно найти, например, в [15, с. 25–26].

Обозначим через  $q_1(f)$  (через  $q_0(f)$ ) число единичных (соответственно нулевых) квазиобособленных наборов функции  $f(\tilde{x}^n)$ ; через  $p_1(f)$  (через  $p_0(f)$ ) – число особых пар единичных (соответственно нулевых) наборов этой функции, а через  $l(f)$  (через  $l^*(f)$ ) – минимально возможную длину ДНФ (соответственно КНФ) для нее.

**Лемма 1.** Если  $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$  или  $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$ , то  $D_0(f) = 0$  и  $D_1(f) = 0$ .

**Доказательство.** Функцию  $f$  можно реализовать контактной схемой, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для нее ПДТ как в случае обрывов, так и в случае замыканий контактов. Отсюда следуют равенства  $D_0(f) = 0$  и  $D_1(f) = 0$ . Лемма 1 доказана.

Рассмотрим в качестве неисправностей контактов только их обрывы.

**Теорема 4.** Для любой неконстантной булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  выполняется соотношение

$$q_1(f) - p_1(f) \leq D_0(f) \leq l(f).$$

**Доказательство.** Докажем сначала неравенство  $D_0(f) \leq l(f)$ . Для этого используем идеи из доказательства леммы 12 работы [13]. Функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно представить в виде ДНФ  $K_1 \vee \dots \vee K_m$ , где  $m = l(f)$ , а  $K_1, \dots, K_m$  – ЭК, содержащие только переменные из множества  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Реализуем каждую ЭК  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , цепью  $Z_i$  из контактов, длина которой равна рангу этой ЭК. Затем все цепи  $Z_1, \dots, Z_m$  соединим параллельно. Очевидно, что построенная схема  $S$  реализует функцию  $f$ , а всевозможные ее функции неисправности равны дизъюнкциям некоторых не более  $(m-1)$  ЭК из множества  $K = \{K_1, \dots, K_m\}$  (дизъюнкцию 0 ЭК из этого множества считаем равной константе 0).

Для каждой ЭК  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , существует двоичный набор  $\tilde{\tau}_i$  длины  $n$ , на котором она обращается в единицу, а все остальные ЭК из множества  $K$  – в нуль; в противном случае ЭК  $K_i$  можно было бы удалить из ДНФ  $K_1 \vee \dots \vee K_m$  и получить ДНФ длины  $l(f) - 1$  для функции  $f(\tilde{x}^n)$ , что невозможно. Наборы  $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_m$ , очевидно, попарно различны. Пусть  $g_1(\tilde{x}^n)$  и  $g_2(\tilde{x}^n)$  – произвольные две булевы функции, представимые в виде различных дизъюнкций некоторых ЭК из множества  $K$ . Тогда существует такое  $i \in \{1, \dots, m\}$ , что ЭК  $K_i$  входит в представление одной из этих функций (без ограничения общности  $g_1$ ) и не входит в представление другой ( $g_2$ ). Легко видеть, что  $g_1(\tilde{\tau}_i) = 1$  и  $g_2(\tilde{\tau}_i) = 0$ . Это означает, что любую функцию неис-

правности схемы  $S$  можно отличить от функции  $f(\tilde{x}^n)$ , а любые две различные функции неисправности данной схемы – друг от друга на наборах из множества  $\{\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_m\}$ . Таким образом, указанное множество является для нее ПДТ длины  $m$  и

$$D_0(f) \leq D_0(S) \leq m = l(f),$$

откуда получаем требуемое неравенство.

Докажем теперь, что  $q_1(f) - p_1(f) \leq D_0(f)$ . Пусть  $\tilde{\pi}$  – произвольный набор, являющийся парным хотя бы одному единичному квазиобособленному набору функции  $f(\tilde{x}^n)$ . Обозначим через  $N(\tilde{\pi})$  число квазиобособленных наборов указанной функции, которым набор  $\tilde{\pi}$  является парным, а через  $M^S(f)$  – множество всех единичных обособленных наборов функции  $f(\tilde{x}^n)$ .

Пусть  $S$  – произвольная контактная схема, реализующая функцию  $f(\tilde{x}^n)$ ;  $T$  – произвольный ПДТ для схемы  $S$ . Достаточно доказать, что  $D_0(T) \geq q_1(f) - p_1(f)$ . Рассмотрим произвольный единичный квазиобособленный набор  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  функции  $f$ . Возможны два случая.

1. Набор  $\tilde{\sigma}$  является обособленным набором функции  $f$ . Рассуждая аналогично рассмотрению случая 1 в доказательстве теоремы 1, получаем, что у схемы  $S$  есть функции неисправности  $g(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$  и  $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 0$ , которые можно отличить друг от друга только на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому данный набор должен входить в тест  $T$ . В силу произвольности выбора набора  $\tilde{\sigma}$  в множество  $T$  должны входить все наборы из множества  $M^S(f)$ .

2. Существует парный  $\tilde{\sigma}$  набор  $\tilde{\pi}$ . Тогда  $n \geq 2$ , поскольку для  $n = 1$  и  $f(x_1) \in \{x_1, \bar{x}_1\}$  случай 2, очевидно, не выполнен. В силу определений наборы  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\pi}$  различаются ровно в одной компоненте; для простоты будем считать, что это первая компонента (в остальных случаях рассуждения аналогичны), т.е.  $\tilde{\pi} = (\bar{\sigma}_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ . Из равенства  $f(\tilde{\sigma}) = 1$  следует, что в схеме  $S$  есть несамопересекающаяся цепь  $Z_{\tilde{\sigma}}$  между полюсами, проводящая на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Легко видеть, что данная цепь может содержать только контакты  $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$ .

Если в ней не содержится ни одного контакта  $x_j^{\sigma_j}$  для некоторого  $j \in \{2, \dots, n\}$ , то цепь  $Z_{\tilde{\sigma}}$ , а вместе с ней и схема  $S$  проводят также на наборе  $\tilde{\pi}_j$ , отличающегося от набора  $\tilde{\sigma}$  только в  $j$ -й компоненте, откуда следует, что  $f(\tilde{\pi}_j) = 1$ . Но это противоречит тому, что  $\tilde{\sigma}$  – квазиобособленный набор функции  $f$ ,  $f(\tilde{\sigma}) = 1$  и  $\tilde{\pi}$  – парный  $\tilde{\sigma}$  набор. Таким образом, в цепи  $Z_{\tilde{\sigma}}$  содержится хотя бы по одному контакту  $x_2^{\sigma_2}, \dots, x_n^{\sigma_n}$ , а также, возможно, один или несколько контактов  $x_1^{\sigma_1}$ . При обрыве всех контактов схемы  $S$ , не содержащихся в этой цепи, схема станет реализовывать функцию  $g'_1(\tilde{x}^n) \in \{x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}, x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}\}$ , а при обрыве всех контактов схемы

$S$  – функцию  $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 0$ . Функции  $g'_1(\tilde{x}^n)$  и  $g_0(\tilde{x}^n)$  можно отличить друг от друга только на наборе  $\tilde{\sigma}$  и, возможно, на наборе  $\tilde{\pi}$ .

Пусть  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_t$  – все квазиобособленные наборы функции  $f(\tilde{x}^n)$ , которым набор  $\tilde{\pi}$  является парным, где  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}$  и  $t \geq 1$ . Тогда  $N(\tilde{\pi}) = t$  и

$$f(\tilde{\rho}_1) = \dots = f(\tilde{\rho}_t) = f(\tilde{\pi}) = 1. \quad (6)$$

Проводя для каждого набора  $\tilde{\rho}_u$ ,  $u = 2, \dots, t$  (при  $t \geq 2$ ), те же рассуждения, которые были проведены для набора  $\tilde{\sigma}$  в разборе случая 2, получаем, что у схемы  $S$  есть функция неисправности  $g'_u(\tilde{x}^n)$ , отличающаяся от функции  $g_0(\tilde{x}^n)$  только на наборе  $\tilde{\rho}_u$  и, возможно, на наборе  $\tilde{\pi}$ . Составим таблицу значений функций  $g'_1, \dots, g'_t, g_0$  на наборах  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_t, \tilde{\pi}$ , а также на произвольном другом двоичном наборе  $\tilde{\delta}$  длины  $n$  (вместо каждой звездочки может стоять как 0, так и 1) (табл. 1).

Таблица 1

|                  | $g'_1$ | ... | $g'_u$ | ... | $g'_v$ | ... | $g'_t$ | $g_0$ |
|------------------|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-------|
| $\tilde{\rho}_1$ | 1      | ... | 0      | ... | 0      | ... | 0      | 0     |
| ...              | ...    | ... | ...    | ... | ...    | ... | ...    | ...   |
| $\tilde{\rho}_u$ | 0      | ... | 1      | ... | 0      | ... | 0      | 0     |
| ...              | ...    | ... | ...    | ... | ...    | ... | ...    | ...   |
| $\tilde{\rho}_v$ | 0      | ... | 0      | ... | 1      | ... | 0      | 0     |
| ...              | ...    | ... | ...    | ... | ...    | ... | ...    | ...   |
| $\tilde{\rho}_t$ | 0      | ... | 0      | ... | 0      | ... | 1      | 0     |
| $\tilde{\pi}$    | *      | ... | *      | ... | *      | ... | *      | 0     |
| $\tilde{\delta}$ | 0      | ... | 0      | ... | 0      | ... | 0      | 0     |

Из табл. 1 видно, что если в множество  $T$  не входят одновременно наборы  $\tilde{\rho}_u$  и  $\tilde{\rho}_v$  для некоторых  $u, v \in \{1, \dots, t\}$ , то по крайней мере две из трех функций  $g'_u$ ,  $g'_v$  и  $g_0$  нельзя отличить друг от друга на наборах из  $T$ , но это противоречит тому, что  $T$  – ПДТ для схемы  $S$ . Если же в множество  $T$  не входят одновременно наборы  $\tilde{\rho}_u$  и  $\tilde{\pi}$  для некоторого  $u \in \{1, \dots, t\}$ , то функции  $g'_u$  и  $g_0$  нельзя различить на наборах из  $T$ ; вновь получаем противоречие. Таким образом, в тест  $T$  входят по крайней мере  $t = N(\tilde{\pi})$  наборов из множества  $\{\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_t, \tilde{\pi}\}$ . Обозначим множество, состоящее из этих  $N(\tilde{\pi})$  наборов, через  $M_{\tilde{\pi}}(S)$ .

Из рассмотрения случаев 1 и 2 следует, что

$$T \supseteq M^S(f) \cup \bigcup_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S)$$

(здесь и далее большое объединение, а также большая сумма берутся по всем наборам  $\tilde{\pi}$ , являющимся парными хотя бы одному единичному квазиобособленному набору функции  $f(\tilde{x}^n)$ ). Поэтому

$$D_0(T) = |T| \geq \left| M^S(f) \cup \bigcup_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S) \right|.$$

Заметим, что множества  $M^S(f)$  и  $\bigcup_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S)$  не пересекаются, так как ни в одном множестве  $M_{\tilde{\pi}}(S)$  не содержится ни одного обособленного набора (см. (6)). Следовательно,

$$D_0(T) \geq |M^S(f)| + \left| \bigcup_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S) \right|. \quad (7)$$

Далее предположим, что некоторый набор  $\tilde{\rho}$  принадлежит одновременно двум построенным множествам  $M_{\tilde{\pi}_1}(S)$  и  $M_{\tilde{\pi}_2}(S)$  при  $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$ . Если  $\tilde{\rho} \neq \tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\rho} \neq \tilde{\pi}_2$ , то в силу построения указанных множеств  $\tilde{\rho}$  является квазиобособленным набором функции  $f(\tilde{x}^n)$ , а оба набора  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  – парные ему наборы, что невозможно. Поэтому  $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ ; без ограничения общности можно считать, что  $\tilde{\rho} = \tilde{\pi}_1$ . Тогда  $\tilde{\rho} \neq \tilde{\pi}_2$  и из соотношения  $\tilde{\pi}_1 \in M_{\tilde{\pi}_2}(S)$  следует, что  $\tilde{\pi}_1$  – единичный квазиобособленный набор функции  $f(\tilde{x}^n)$ , а  $\tilde{\pi}_2$  – парный ему набор. Значит,  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  – соседние наборы. Других соседних наборов у  $\tilde{\pi}_1$  быть не может, и при этом он является парным некоторому квазиобособленному набору функции  $f(\tilde{x}^n)$ . Такое возможно только в том случае, если  $\tilde{\pi}_2$  – квазиобособленный набор функции  $f(\tilde{x}^n)$ , а  $\tilde{\pi}_1$  – парный ему набор. Получаем, что наборы  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  образуют особую пару наборов. Тогда оба множества  $M_{\tilde{\pi}_1}(S)$ ,  $M_{\tilde{\pi}_2}(S)$  по построению являются подмножествами мощности 1 множества  $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$  и, как следствие, пересекаются только по одному набору.

Из приведенных рассуждений следует, что множества  $M_{\tilde{\pi}_1}(S)$  и  $M_{\tilde{\pi}_2}(S)$  при  $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$  могут пересекаться только в случае, когда  $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$  – особая пара единичных наборов функции  $f(\tilde{x}^n)$ , причем пересекаются не более чем по одному набору. Отсюда, из (7) и определения величины  $p_1(f)$  вытекает соотношение

$$D_0(T) \geq |M^S(f)| + \sum_{\tilde{\pi}} |M_{\tilde{\pi}}(S)| - p_1(f) \cdot 1 = |M^S(f)| + \sum_{\tilde{\pi}} N(\tilde{\pi}) - p_1(f).$$

Осталось заметить, что  $\left| M^s(f) \right| + \sum_{\tilde{\pi}} N(\tilde{\pi}) = q_1(f)$ , поскольку любой

единичный квазиобособленный набор функции  $f(\tilde{x}^n)$  либо является ее обособленным набором, либо имеет ровно один набор  $\tilde{\pi}$  в качестве парного. Неравенство  $D_0(T) \geq q_1(f) - p_1(f)$ , а вместе с ним теорема 4 доказаны.

**Следствие 2.** Для любого  $n \geq 1$  справедливо равенство  $D_0(n) = 2^{n-1}$ .

**Доказательство.** Для любой неконстантной булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  несложно получить неравенство  $l(f) \leq 2^{n-1}$  (см., например, доказательство неравенства  $\lambda(n) \leq 2^{n-1}$  в [15, с. 61, теорема 7.1]). Тогда  $D_0(f) \leq 2^{n-1}$  в силу теоремы 4. Если же  $f \equiv 0$  или  $f \equiv 1$ , то  $D_0(f) = 0$  по лемме 1. В итоге получаем, что  $D_0(n) \leq 2^{n-1}$ .

С другой стороны, у функции  $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$  любой из ее  $2^{n-1}$  единичных наборов, очевидно, является обособленным, следовательно,  $q_1(f) = 2^{n-1}$  и  $p_1(f) = 0$ . Тогда из теоремы 4 вытекает, что  $D_0(f) \geq 2^{n-1}$ , поэтому  $D_0(n) \geq 2^{n-1}$ . Окончательно имеем  $D_0(n) = 2^{n-1}$ . Следствие 2 доказано.

Множество двоичных наборов длины  $n$  называется *двоичным блоковым кодом длины  $n$ , исправляющим одну ошибку*, если любые два набора из этого множества различаются по крайней мере в трех компонентах (см., например, [16]; отметим, что любое множество мощности не более 1 удовлетворяет данному определению). Обозначим через  $v(n)$  число различных таких кодов. Сокращенно будем их называть  $(n, 2, 1)$ -кодами.

Произвольный двоичный набор длины  $n$ , сумма компонент которого по модулю 2 равна  $\alpha$ , для краткости назовем  $(n, \alpha)$ -набором.

**Теорема 5.** Число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных,  $n \geq 2$ , для которых  $D_0(f) = 2^{n-1}$ , не меньше  $2v(n-1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $B$  – произвольный  $(n-1, 2, 1)$ -код,  $\alpha$  – произвольная булева константа. Заменим каждый набор  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in B$  на  $(n, \bar{\alpha})$ -набор  $(\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_{n-1} \oplus \bar{\alpha}, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ . Множество полученных наборов (той же мощности, что и  $B$ ) обозначим через  $B_\alpha$ . Определим булеву функцию  $f_{B,\alpha}(\tilde{x}^n)$ , равную 1 на всех  $(n, \alpha)$ -наборах, а также на всех наборах из множества  $B_\alpha$ , и равную 0 на всех остальных наборах. Предположим, что какой-то  $(n, \alpha)$ -набор  $\tilde{\pi}$  не является квазиобособленным набором указанной функции. Тогда существуют такие два различных набора  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$ , соседних с набором  $\tilde{\pi}$ , что

$$f_{B,\alpha}(\tilde{\pi}_1) = f_{B,\alpha}(\tilde{\pi}_2) = f_{B,\alpha}(\tilde{\pi}) = 1.$$

Каждый из наборов  $\tilde{\pi}_1$ ,  $\tilde{\pi}_2$  является  $(n, \bar{\alpha})$ -набором, поэтому из последнего соотношения следует, что  $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \in B_\alpha$ . Тогда наборы  $\tilde{\pi}'_1$  и  $\tilde{\pi}'_2$  длины

$(n-1)$ , получающиеся из наборов соответственно  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  отбрасыванием первой компоненты, принадлежат множеству  $B$  и различаются не более чем в двух компонентах, поскольку наборы  $\tilde{\pi}_1$  и  $\tilde{\pi}_2$  различаются ровно в двух компонентах. Однако это противоречит тому, что  $B - (n-1, 2, 1)$ -код. Полученное противоречие означает, что каждый из  $2^{n-1}$   $(n, \alpha)$ -наборов является единичным квазиобособленным набором функции  $f_{B, \alpha}$ . Тогда

$$q_1(f_{B, \alpha}) \geq 2^{n-1}. \quad (8)$$

Далее предположим, что у функции  $f_{B, \alpha}(\tilde{x}^n)$  есть хотя бы одна особая пара единичных наборов. Один набор из этой пары обязательно является  $(n, \bar{\alpha})$ -набором; обозначим его через  $\tilde{\tau}$ . Пусть  $\tilde{\tau}_1$  и  $\tilde{\tau}_2$  – различные соседние с  $\tilde{\tau}$  наборы (такие наборы найдутся, так как  $n \geq 2$ ). Тогда они оба являются  $(n, \alpha)$ -наборами и

$$f_{B, \alpha}(\tilde{\tau}_1) = f_{B, \alpha}(\tilde{\tau}_2) = 1 = f_{B, \alpha}(\tilde{\tau}).$$

Следовательно,  $\tilde{\tau}$  не является квазиобособленным набором функции  $f_{B, \alpha}$ , однако это противоречит тому, что он входит в особую пару наборов данной функции. Таким образом, у функции  $f_{B, \alpha}(\tilde{x}^n)$  не может быть ни одной особой пары единичных наборов и  $p_1(f_{B, \alpha}) = 0$ . Отсюда, из (8) и теоремы 4 получаем, что

$$D_0(f_{B, \alpha}) \geq q_1(f_{B, \alpha}) - p_1(f_{B, \alpha}) \geq 2^{n-1} - 0 = 2^{n-1}.$$

С другой стороны,  $D_0(f_{B, \alpha}) \leq 2^{n-1}$  в силу следствия 2. Поэтому

$$D_0(f_{B, \alpha}) = 2^{n-1}. \quad (9)$$

Легко видеть, что для любого фиксированного  $\alpha \in \{0, 1\}$  из различных  $(n-1, 2, 1)$ -кодов  $B$  получаются различные множества  $B_\alpha$ , а значит, и различные функции  $f_{B, \alpha}(\tilde{x}^n)$ . Если же  $f_{B, 0}(\tilde{x}^n) \equiv f_{B', 1}(\tilde{x}^n)$  для некоторых  $(n-1, 2, 1)$ -кодов  $B$  и  $B'$ , то функция  $f_{B, 0}(\tilde{x}^n)$  по определению принимает значение 1 на всех  $(n, 0)$ -наборах и всех  $(n, 1)$ -наборах, т.е.  $f_{B, 0} \equiv 1$ . Но в таком случае  $D_0(f_{B, 0}) = 0$  по лемме 1; противоречие с (9). Отсюда заключаем, что все функции  $f_{B, \alpha}$  для произвольных  $(n-1, 2, 1)$ -кода  $B$  и  $\alpha \in \{0, 1\}$  попарно различны. Общее число этих функций равно  $2v(n-1)$ , и каждая из них удовлетворяет равенству (9). Теорема 5 доказана.

Введем обозначение  $w(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ . Отметим, что  $w(n) \leq 2^n$  при  $n \geq 1$ .

**Утверждение 1.** Для любого  $n \geq 1$  справедливо неравенство

$$v(n) \geq 1 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil} \left( \frac{2^n (2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \right),$$

правая часть которого асимптотически не меньше  $\frac{2}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log_2(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}}$

(при  $n \rightarrow \infty$ ).

Из теоремы 5 и утверждения 1 вытекает

**Следствие 3.** Число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D_0(f) = 2^{n-1}$ , при  $n \geq 2$  не меньше

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left( \frac{2^{n-1} (2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \dots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше  $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log_2(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$ .

**Доказательство утверждения 1.** Для установления неравенства на  $v(n)$  достаточно доказать, что число  $(n, 2, 1)$ -кодов мощности  $i$  не меньше

$$\frac{2^n (2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \quad \text{для } i = 1, \dots, \left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil \quad \left( \text{с учетом того, что су-} \right.$$

ществует  $(n, 2, 1)$ -код мощности 0 – пустое множество). В качестве первого набора для произвольного  $(n, 2, 1)$ -кода мощности  $i$  можно взять любой из  $2^n$  двоичных наборов длины  $n$ . Пусть уже выбраны  $j$  наборов для этого кода,  $j \in \{1, \dots, i-1\}$  (при  $i \geq 2$ ). Тогда в качестве  $(j+1)$ -го набора для него можно выбрать любой двоичный набор длины  $n$ , отличающийся от каждого из ранее выбранных по крайней мере в трех компонентах. Это можно сделать не менее чем  $2^n - j \cdot w(n)$  способами, так как общее число наборов, отличающихся от произвольного двоичного набора длины  $n$  не более чем в двух компонентах, равно

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = w(n)$$

(из соотношения

$$2^n - j \cdot w(n) \geq 2^n - (i-1)w(n) \geq 2^n - \left( \left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil - 1 \right) w(n) > 2^n - \frac{2^n}{w(n)} w(n) = 0$$

вытекает, что  $2^n - j \cdot w(n) > 0$ ). Таким образом, общее число способов выбрать для  $(n, 2, 1)$ -кода  $i$  наборов с учетом их порядка не меньше  $2^n(2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))$ , а без учета порядка – не меньше  $\frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!}$ , что и требовалось доказать.

Покажем, что выражение

$$1 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil} \left( \frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \right)$$

асимптотически не меньше  $\frac{2}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log_2(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}}$ . Для любых  $i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{2^n}{w(n)} \right\rfloor$  и  $j = 0, \dots, i-1$  имеем

$$2^n \geq i \cdot w(n),$$

$$i(2^n - j \cdot w(n)) \geq 2^n(i - j),$$

$$\frac{2^n - j \cdot w(n)}{i - j} \geq \frac{2^n}{i},$$

$$\frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \geq \left( \frac{2^n}{i} \right)^i \geq \left( 2^n : \frac{2^n}{w(n)} \right)^i = w^i(n),$$

поэтому

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil} \left( \frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \dots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \right) &\geq \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{2^n}{w(n)} \right\rfloor} w^i(n) = \\ &= \frac{w^{\left\lfloor \frac{2^n}{w(n)} \right\rfloor + 1}(n) - 1}{w(n) - 1} > \frac{\frac{2^n}{w^{w(n)}(n)} - 1}{\left( \frac{n^2 + n}{2} \right)} = \\ &= \frac{\frac{2^n}{2w^{w(n)}(n)} - 2}{n^2 + n} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2^n \log_2 w(n)}{w(n)}} - 2}{n^2 + n} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log_2(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}} - 2}{n^2 + n}, \end{aligned}$$

что асимптотически не меньше  $\frac{2}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log_2(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}}$ . Утверждение 1 доказано.

### Полные диагностические тесты замыкания

Рассмотрим в качестве неисправностей контактов только их замыкания. Почти все утверждения из этого раздела доказываются с помощью соответствующих утверждений из предыдущего раздела и принципа двойственности (см., например, [17, с. 24]). Однако, как известно, в классе произвольных двухполюсных контактных схем не удается ввести простого понятия двойственности (с тем требованием, чтобы двойственные схемы реализовывали двойственные булевы функции), поэтому некоторые рассуждения все же понадобятся.

**Теорема 6.** Для любой неконстантной булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  выполняется соотношение

$$q_0(f) - p_0(f) \leq D_1(f) \leq l^*(f).$$

**Доказательство.** Докажем сначала неравенство  $D_1(f) \leq l^*(f)$ . Функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно представить в виде КНФ  $D_1 \& \dots \& D_m$ , где  $m = l^*(f)$ , а  $D_1, \dots, D_m$  – ЭД, содержащие только переменные из множества  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Реализуем каждую ЭД  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , пучком  $P_i$  из параллельно соединенных контактов, число которых равно рангу этой ЭД. Затем все пучки  $P_1, \dots, P_m$  соединим последовательно. Очевидно, что построенная схема  $S$  реализует функцию  $f$ , а всевозможные ее функции неисправности равны конъюнкциям некоторых не более  $(m-1)$  ЭД из множества  $\{D_1, \dots, D_m\}$  (дизъюнкцию 0 ЭД из этого множества считаем равной константе 1). Дальнейшие рассуждения проводятся двойственным образом по отношению к доказательству неравенства  $D_0(f) \leq l(f)$  в теореме 4.

Докажем теперь, что  $q_0(f) - p_0(f) \leq D_1(f)$ . Пусть  $\tilde{\pi}$  – произвольный набор, являющийся парным хотя бы одному нулевому квазиобособленному набору функции  $f(\tilde{x}^n)$ . Обозначим через  $N(\tilde{\pi})$  число квазиобособленных наборов указанной функции, которым набор  $\tilde{\pi}$  является парным, а через  $M^S(f)$  – множество всех нулевых обособленных наборов функции  $f(\tilde{x}^n)$ .

Пусть  $S$  – произвольная контактная схема, реализующая функцию  $f(\tilde{x}^n)$ ;  $T$  – произвольный ПДТ для схемы  $S$ . Достаточно доказать, что  $D_1(T) \geq q_0(f) - p_0(f)$ . Рассмотрим произвольный нулевой квазиобособленный набор  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  функции  $f$ . Возможны два случая.

1. Набор  $\tilde{\sigma}$  является обособленным набором функции  $f$ . Рассуждая аналогично рассмотрению случая 2 в доказательстве теоремы 1, получаем, что у схемы  $S$  есть функции неисправности  $g(\tilde{x}^n) = x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$  и  $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 1$ , которые можно отличить друг от друга только на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому данный набор должен входить в тест  $T$ . В силу произвольности выбора набора  $\tilde{\sigma}$  в множество  $T$  должны входить все наборы из множества  $M^S(f)$ .

2. Существует парный  $\tilde{\sigma}$  набор  $\tilde{\pi}$ . Тогда  $n \geq 2$ , поскольку для  $n = 1$  и  $f(x_1) \in \{x_1, \bar{x}_1\}$  случай 2, очевидно, не выполнен. В силу определений наборы

$\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\pi}$  различаются ровно в одной компоненте; для простоты будем считать, что это первая компонента (в остальных случаях рассуждения аналогичны), т.е.  $\tilde{\pi} = (\bar{\sigma}_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ . Из равенства  $f(\tilde{\sigma}) = 1$  следует, что в схеме  $S$  есть тупиковое сечение  $A^*$ , содержащее только контакты из множества  $\{x_1^{\bar{\sigma}_1}, \dots, x_n^{\hat{\sigma}_n}\}$ . Если в  $A^*$  не содержится ни одного контакта  $x_j^{\bar{\sigma}_j}$  для некоторого  $j \in \{2, \dots, n\}$ , то схема  $S$  не проводит на наборе  $\tilde{\pi}_j$ , отличающегося от набора  $\tilde{\sigma}$  только в  $j$ -й компоненте, откуда следует, что  $f(\tilde{\pi}_j) = 0$ . Но это противоречит тому, что  $\tilde{\sigma}$  – квазибособобленный набор функции  $f$ ,  $f(\tilde{\sigma}) = 0$  и  $\tilde{\pi}$  – парный  $\tilde{\sigma}$  набор. Таким образом, в сечении  $A^*$  содержится хотя бы по одному контакту  $x_2^{\bar{\sigma}_2}, \dots, x_n^{\hat{\sigma}_n}$ , а также, возможно, один или несколько контактов  $x_1^{\bar{\sigma}_1}$ .

Представим, что все контакты, содержащиеся в этом сечении, исправны, а все остальные контакты схемы  $S$  замкнуты. Данная схема при этом станет реализовывать некоторую функцию неисправности  $g_1(\tilde{x}^n)$ . Заметим, что  $g_1(\tilde{\sigma}) = 0$ , так как на наборе  $\tilde{\sigma}$  все контакты сечения  $A^*$  разомкнуты. Пусть  $\tilde{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$  – произвольный двоичный набор длины  $n$ , отличный от наборов  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\pi}$ . Тогда существует такое  $j \in \{2, \dots, n\}$ , что  $\tau_j = \bar{\sigma}_j$ . В силу тупиковости сечения  $A^*$  для любого его контакта  $x_j^{\bar{\sigma}_j}$  в схеме  $S$  найдется несамопересекающаяся цепь  $Z$  между полюсами, в которой этот контакт является единственным контактом, принадлежащим  $A^*$ , а все остальные контакты цепи  $Z$  замкнуты. Данная цепь проводит на наборе  $\tilde{\tau}$ , поэтому  $g_1(\tilde{\tau}) = 1$ . В итоге значения функции  $g_1(\tilde{x}^n)$  на всех наборах, кроме набора  $\tilde{\pi}$ , определены однозначно и

$$g_1(\tilde{x}^n) = \begin{cases} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}, & \text{если } g_1(\tilde{\pi}) = 1, \\ x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}, & \text{если } g_1(\tilde{\pi}) = 0. \end{cases}$$

В то же время при замыкании всех контактов схемы  $S$  между ее полюсами возникнет функция неисправности  $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 1$ . Функции  $g_1(\tilde{x}^n)$  и  $g_0(\tilde{x}^n)$  можно отличить друг от друга только на наборе  $\tilde{\sigma}$  и, возможно, на наборе  $\tilde{\pi}$ .

Пусть  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_t$  – все квазибособобленные наборы функции  $f(\tilde{x}^n)$ , которым  $\tilde{\pi}$  является парным набором, где  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}$  и  $t \geq 1$ . Тогда  $N(\tilde{\pi}) = t$  и

$$f(\tilde{\rho}_1) = \dots = f(\tilde{\rho}_t) = f(\tilde{\pi}) = 1.$$

Проводя для каждого набора  $\tilde{\rho}_u$ ,  $u = 2, \dots, t$  (при  $t \geq 2$ ), те же рассуждения, которые были проведены для набора  $\tilde{\sigma}$  в разборе случая 2, получаем, что у схемы  $S$  есть функция неисправности  $g_u(\tilde{x}^n)$ , отличающаяся от функ-

ции  $g_0(\tilde{x}^n)$  только на наборе  $\tilde{\rho}_u$  и, возможно, на наборе  $\tilde{\pi}$ . Далее, рассуждая двойственным образом по отношению к рассуждениям из теоремы 4, начиная со слов «составим таблицу значений функций...», устанавливаем справедливость теоремы 6.

**Следствие 4.** Для любого  $n \geq 1$  справедливо равенство  $D_1(n) = 2^{n-1}$ .

**Доказательство.** Для любой неконстантной булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  можно получить неравенство  $l^*(f) \leq 2^{n-1}$  двойственным образом по отношению к получению неравенства  $l(f^*) \leq 2^{n-1}$ , где  $f^*$  – двойственная к  $f$  булева функция. Тогда  $D_1(f) \leq 2^{n-1}$  в силу теоремы 6. Если же  $f \equiv 0$  или  $f \equiv 1$ , то  $D_1(f) = 0$  по лемме 1. В итоге получаем, что  $D_1(n) \leq 2^{n-1}$ .

С другой стороны, у функции  $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$  любой из ее  $2^{n-1}$  нулевых наборов, очевидно, является обособленным, следовательно,  $q_0(f) = 2^{n-1}$  и  $p_0(f) = 0$ . Тогда из теоремы 6 вытекает, что  $D_1(f) \geq 2^{n-1}$ , поэтому  $D_1(n) \geq 2^{n-1}$ . Окончательно имеем  $D_1(n) = 2^{n-1}$ . Следствие 4 доказано.

**Теорема 7.** Число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных,  $n \geq 2$ , для которых  $D_1(f) = 2^{n-1}$ , не меньше  $2v(n-1)$ .

Доказательство теоремы 7 проводится двойственным образом по отношению к доказательству теоремы 5.

Из теоремы 7 и утверждения 1 вытекает

**Следствие 5.** Число булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D_1(f) = 2^{n-1}$ , при  $n \geq 2$  не меньше

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left( \frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \dots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше

$$\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log_2(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}.$$

### Заключение

Результаты, сформулированные в следствиях 2 и 4, являются окончательными. Нижние оценки чисел булевых функций  $f$  от  $n$  переменных, для которых  $D_{0,1}(f) = 2^n$ ,  $D_0(f) = 2^{n-1}$  и  $D_1(f) = 2^{n-1}$ , установленные в следствиях 1, 3 и 5 соответственно, могут быть улучшены, если удастся получить более точные нижние оценки величин  $\text{mis}(C_n)$  и  $v(n)$ , чем те, которые получены в теореме 3 и утверждении 1. Однако указанные задачи уже выходят за рамки теории тестов для схем.

**Библиографический список**

1. **Лупанов, О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем / О. Б. Лупанов. – Москва : Изд-во МГУ, 1984. – 138 с.
2. **Чегис, И. А.** Логические способы контроля работы электрических схем / И. А. Чегис, С. В. Яблонский // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. – 1958. – Т. 51. – С. 270–360.
3. **Яблонский, С. В.** Надежность и контроль управляющих систем / С. В. Яблонский // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января – 2 февраля 1984 г.). – Москва : МГУ, 1986. – С. 7–12.
4. **Яблонский, С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем / С. В. Яблонский // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 1. – Москва : Наука, 1988. – С. 5–25.
5. **Редькин, Н. П.** Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. – Москва : Изд-во МГУ, 1992. – 192 с.
6. **Мадатян, Х. А.** Полный тест для неповторных контактных схем / Х. А. Мадатян // Проблемы кибернетики. – Вып. 23. – Москва : Наука, 1970. – С. 103–118.
7. **Редькин, Н. П.** О диагностических тестах для контактных схем / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. – 2019. – № 2. – С. 35–37.
8. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах для контактных схем / Н. П. Редькин // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. – Вып. 39. – Новосибирск : Изд-во ИМ СО АН СССР, 1983. – С. 80–87.
9. **Редькин, Н. П.** О проверяющих тестах замыкания и размыкания / Н. П. Редькин // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. – Вып. 40. – Новосибирск : Изд-во ИМ СО АН СССР, 1983. – С. 87–99.
10. **Романов, Д. С.** О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты / Д. С. Романов // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2014. – Т. 156, кн. 3. – С. 110–115.
11. **Попков, К. А.** О тестах замыкания для контактных схем / К. А. Попков // Дискретная математика. – 2016. – Т. 28, № 1. – С. 87–100.
12. **Попков, К. А.** О проверяющих тестах размыкания для контактных схем / К. А. Попков // Дискретная математика. – 2017. – Т. 29, № 4. – С. 66–86.
13. **Попков, К. А.** О диагностических тестах размыкания для контактных схем / К. А. Попков // Дискретная математика. – 2019. – Т. 31, № 2. – С. 123–142.
14. **Duffus, D.** Maximal independent sets in the covering graph of the cube / D. Duffus, P. Frankl, V. Rödl // Discrete Applied Mathematics. – 2013. – № 161. – P. 1203–1208.
15. **Ложкин, С. А.** Лекции по основам кибернетики : учеб. пособие для студентов / С. А. Ложкин. – Москва : Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. – 251 с.
16. **Питерсон, У.** Коды, исправляющие ошибки / У. Питерсон, Э. Уэлдон. – Москва : Мир, 1976. – 593 с.
17. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – Москва : Наука, 1986. – 384 с.

**References**

1. Lupanov O. B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotic complexity bounds for control systems]. Moscow: Izd-vo MGU, 1984, 138 p. [In Russian]
2. Chegis I. A., Yablonskiy S. V. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova* [Proceedings of the Mathematical Institute named after V. A. Steklov]. 1958, vol. 51, pp. 270–360. [In Russian]
3. Yablonskiy S. V. *Materialy Vsesoyuznogo seminar po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moskva, 31 yanvarya–2 fevralya 1984 g.)* [Proceedings of the All-

- Union Seminar on discrete mathematics and its applications]. Moscow: MGU, 1986, pp. 7–12. [In Russian]
4. Yablonskiy S. V. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical issues of cybernetics]. Issue 1. Moscow: Nauka, 1988, pp. 5–25. [In Russian]
  5. Red'kin N. P. *Nadezhnost' i diagnostika skhem* [Reliability and circuit diagnostics]. Moscow: Izd-vo MGU, 1992, 192 p. [In Russian]
  6. Madatyan Kh. A. *Problemy kibernetiki* [Cybernetics problems]. Issue 23. Moscow: Nauka, 1970, pp. 103–118. [In Russian]
  7. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow State University. Series 1, Mathematics. Mechanics]. 2019, no. 2, pp. 35–37. [In Russian]
  8. Red'kin N. P. *Metody diskretnogo analiza v issledovanii ekstremal'nykh struktur* [Discrete analysis methods in the study of extreme structures]. Issue 39. Novosibirsk: Izd-vo IM SO AN SSSR, 1983, pp. 80–87. [In Russian]
  9. Red'kin N. P. *Metody diskretnogo analiza v optimizatsii upravlyayushchikh system* [Discrete analysis methods in control system optimization]. Issue 40. Novosibirsk: Izd-vo IM SO AN SSSR, 1983, pp. 87–99. [In Russian]
  10. Romanov D. S. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of Kazan State University. Physical and mathematical sciences]. 2014, vol. 156, bk. 3, pp. 110–115. [In Russian]
  11. Popkov K. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2016, vol. 28, no. 1, pp. 87–100. [In Russian]
  12. Popkov K. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2017, vol. 29, no. 4, pp. 66–86. [In Russian]
  13. Popkov K. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2019, vol. 31, no. 2, pp. 123–142. [In Russian]
  14. Duffus D., Frankl P., Rödl V. *Discrete Applied Mathematics*. 2013, no. 161, pp. 1203–1208.
  15. Lozhkin S. A. *Leksii po osnovam kibernetiki (uchebnoe posobie dlya studentov)* [Lectures on the basics of cybernetics (study guide for students)]. Moscow: Izd. otel f-ta VMiK MGU, 2004, 251 p. [In Russian]
  16. Piterson U., Ueldon E. *Kody, ispravlyayushchie oshibki* [Error correction codes]. Moscow: Mir, 1976, 593 p. [In Russian]
  17. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction to discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1986, 384 p. [In Russian]

---

**Попков Кирилл Андреевич**

кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудник, сектор  
теоретической кибернетики отдела № 4,  
Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики имени  
М. В. Келдыша Российской академии  
наук (Россия, г. Москва, Миусская пл., 4)

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

---

**Popkov Kirill Andreevich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, researcher, sector of theoretical  
cybernetics of the department No. 4,  
Keldysh Institute of Applied Mathematics  
(Russian Academy of Sciences)  
(4, Miusskaya square, Moscow, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Попков, К. А. О полных диагностических тестах для контактных схем при обрывах и/или замыканиях контактов / К. А. Попков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3 (51). – С. 5–24. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-1.